

NOVA FORMULAÇÃO PARA O DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS LAMINARES DE BETÃO ARMADO



K. PALACIO
Doutorando
Universidade do
Minho
Guimarães



P. B. LOURENÇO
Prof. Associado
Universidade do
Minho
Guimarães



J. A. O. BARROS
Prof. Auxiliar
Universidade do
Minho
Guimarães

SUMÁRIO

A solução do dimensionamento de estruturas laminas de betão a partir dos resultados da análise linear do MEF depende de um modelo de dimensionamento. No presente artigo, introduz-se no modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras os efeitos não lineares das teorias de “compression field”. A validação do novo modelo é feita através de resultados comparativos numéricos e experimentais.

1. INTRODUÇÃO

O uso de técnicas de análise linear elástica através do método dos elementos finitos (MEF), praticamente resolveu a primeira parte do processo de dimensionamento de elementos estruturais de betão armado, o qual é a análise estrutural. No entanto, tal como o efectuado no dimensionamento de estruturas porticadas, nas estruturas laminas de betão armado (paredes, lajes e cascas) é necessário dispor de modelos que permitam determinar as armaduras com base nos resultados das análises lineares.

Para estruturas laminas submetidas a estado plano de tensão, vários modelos foram propostos para a análise do comportamento último e dimensionamento, podendo ser citado o *yield criteria for disks with orthogonal reinforcement* [1], *modified compression field theory*

(MCFT) [2] e o *cracked membrane model* (CMM) [3]. Este ultimo combina os conceitos básicos do MCFT com o modelo de corda de tracção desenvolvido por [4]. A partir da relação do CMM com a análise limite, simples equações de dimensionamento de estruturas de betão fendilhado, submetidas a estado plano de tensão (tipo parede), e armados com malha ortogonal. Recentemente [5] implementou estas equações em um programa de micro-computador e incorporou no programa de análise em elementos finitos DIANA 8.1 através de sua interface de pós-processamento.

No caso de lajes e cascas em betão armado, ver Figura (a), apenas um número reduzido de modelos de dimensionamento estão disponíveis, destacando-se o modelo de três camadas de Marti [6], o critério de cedência de momento normal para lajes [7] e o modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras [8]. Basicamente, todos esses modelos idealizam a estrutura laminar como sendo uma estrutura “sandwich” formada por duas ou três camadas, ver Figura b. As duas camadas externas resistem às tensões no plano dessas camadas, originadas a partir da combinação dos esforços de membrana (n_x, n_y, n_{xy}) e flexão (m_x, m_y, m_{xy}). No modelo de três camadas, a intermédia resiste às tensões de corte transversais devidas às forças de corte ortogonais ao plano médio da estrutura laminar (v_x, v_y). Ainda com relação ao tratamento das duas camadas externas, nos dois primeiros modelos é assumida a hipótese de que os esforços resultantes no betão e na armadura actuam num mesmo nível. Já no modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras o problema é analisado globalmente e não como duas membranas externas.

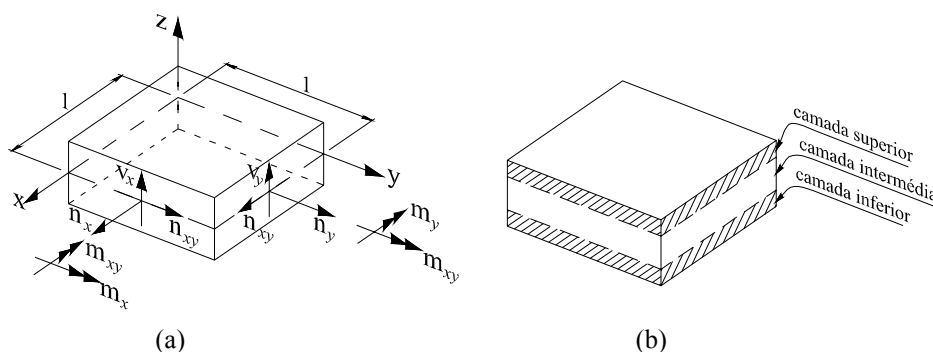


Figura : Elemento de casca: a) tensões resultantes; b) modelo de três camadas

O modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras, baseando-se nas condições de equilíbrio e de resistência, permite determinar as armaduras em paredes, lajes e cascas. Entretanto, as equações deste modelo não têm em conta a influência das forças de corte transversais e nem os efeitos não lineares do betão. Assim, no presente artigo, a formulação que permite dimensionar aos esforços transversos e ter em consideração dos efeitos não-lineares foi implementada no modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras a partir da aplicação dos conceitos do CMM com análise limite. O resultado é um novo modelo teórico para o dimensionamento das armaduras a aplicar em estruturas laminares de betão. Admite-se que estas armaduras constituem redes com varões ortogonais entre si.

2. CRACKED MEMBRANE MODEL COM ANÁLISE LIMITE

Os aspectos fundamentais do comportamento do CMM são baseados nos conceitos do “compression field approaches” e no modelo de corda de tracção de [4]. Da relação do CMM com a análise limite, a formulação do CMM passa a se fundamentar nos conceitos do “compression field approaches” e análise limite. Da aplicação dos conceitos do “compression field approaches”, o equilíbrio em termos de esforços para um elemento de betão a estado plano de tensão (EPT), fendilhado e armado com uma malha ortogonal, ver Figura 1a, resulta nas seguintes equações, ver Figura 1(b,c),

$$n_x = n_{sx} + n_{cl} \sin^2 \theta \quad n_y = n_{sy} + n_{cl} \cos^2 \theta \quad n_{xy} = -n_{cl} \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

onde θ é a inclinação da direcção da principal de compressão em relação ao eixo y ; n_{cl} força principal compressiva no betão; n_x , n_y e n_{xy} são os esforços solicitantes de membrana; n_{sx} e n_{sy} são os esforços nas armaduras nas direcções x e y , respectivamente.

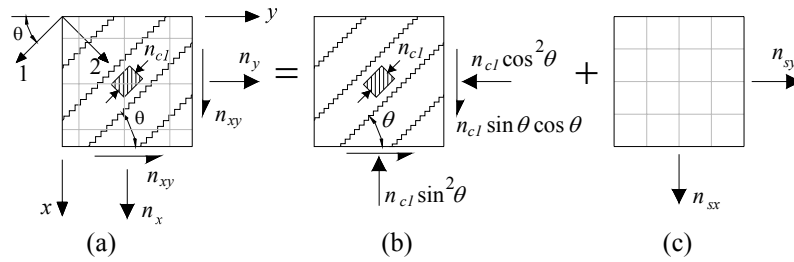


Figura 1: Elemento de betão armado submetido a EPT: a) forças aplicadas; esforços b) no betão c) nas armaduras.

Admitindo-se que os eixos das tensões principais coincidem com os eixos das extensões principais, o estado de extensão e de tensão em qualquer direcção pode ser obtido através do círculo de Mohr, determinando-se para as extensões a seguinte relação,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y + (\varepsilon_y - \varepsilon_1) \cot^2 \theta \quad (2)$$

em que ε_1 e ε_2 são as extensões principais médias totais no elemento de betão fendilhado e ε_y é a extensão média total na direcção y .

Devido à relação do CMM com a análise limite, o comportamento do aço no estado limite é definido pela sua tensão de cedência, f_y . A investigação experimental tem revelado que a resistência à compressão do betão entre fendas, f_c , diminui com o aumento da extensão de tracção na direcção normal ao plano das fendas, ε_2 . Para simular este efeito, é proposta em [3] a seguinte equação,

$$f_c = (f'_c)^{2/3} / (0.4 + 30\varepsilon_2) \leq f'_c \quad \text{em N/mm}^2 \quad (3)$$

onde f'_c é a resistência do betão à compressão em cilindros.

2.1 Equações de Dimensionamento

Manuseando as equações (1), pode-se obter as expressões para os esforços nas armaduras e no betão nas fendas,

$$n_{sx} = n_x + n_{xy} \tan \theta \quad n_{sy} = n_y + n_{xy} \cot \theta \quad -n_{c1} = n_{xy} / \sin \theta \cos \theta \quad (5)$$

as quais são as tradicionais equações de dimensionamento de armaduras para elementos de membrana de betão armado ortogonalmente, ver [1]. De acordo com [1] e [3], quatro regimes de dimensionamento podem ser definidos, ver Tabela 1. Para cada regime, a condição de não esmagamento do betão deve ser verificada, $-n_{c1} \geq h \cdot f_c$, onde h é a espessura do elemento. Com a introdução dos conceitos do CMM com a análise limite, o valor de f_c pode ser determinado para cada regime através da equação (3), desde que o valor da extensão principal de tração ε_2 seja conhecida. Entretanto ε_2 não pode ser determinado pela análise limite, mas pode ser expresso em termos de $(n_{sx} - n_x)$ e $(n_{sy} - n_y)$ se algumas suposições forem assumidas, ver [3]. Admitindo que a extensão na direcção da armadura em cedência ou não é igual a 0.002 no estado limite último e, a extensão principal de compressão no betão ε_{c1} seja igual -0.002, o valor de ε_2 dado pela equação (2) passa ser função somente do termo $\cot^2 \theta$, cujos valores estão expressos na última coluna da Tabela 1. Devido as suposições indicadas acima, o valor de $\cot^2 \theta$ para o Regime 4 é alterado, pois a partir do círculo de Mohr para extensões o valor de $\cot^2 \theta$ resulta em 1. Portanto, substituindo ε_2 na expressão de f_c , equação (3), novas expressões de f_c para cada regime de dimensionamento são obtidas,

$$f_{c1} = (f_c')^{2/3} / [0.46 + 0.12 \cdot (R_{sy} / R_{sx})] \quad (6a)$$

$$f_{c2} = (4.17 R_{sx} / h) \cdot \left[\sqrt{0.1156 + 0.48 h (f_c')^{2/3} / R_{sx}} - 0.34 \right] \quad f_{c3} = R_{sy} \leftrightarrow R_{sx} \quad (6b)$$

$$f_{c4} = (50/29) \cdot (f_c')^{2/3} \quad (6c)$$

onde $R_{sx} = n_{sx} - n_x$ e $R_{sy} = n_{sy} - n_y$.

Tabela 1 - Expressões de dimensionamento para elementos de membrana de betão armado

Regime	Condições	n_{sx}	n_{sy}	$-n_{c1}$	$\cot^2 \theta$
1	$n_x \geq -n_{xy} \tan \theta$ $n_y \geq -n_{xy} \cot \theta$	$n_x + n_{xy} \tan \theta$	$n_y + n_{xy} \cot \theta$	$\frac{n_{xy}}{\sin \theta \cos \theta}$	$\frac{n_{sy} - n_y}{n_{sx} - n_x}$
2	$n_x \geq -n_{xy} \tan \theta$ $n_y < -n_{xy} \cot \theta$	$n_x + n_{xy} \tan \theta$	0	$\frac{n_{xy}}{\sin \theta \cos \theta}$	$\frac{n_{c1} - n_{sx} + n_x}{-(n_{sx} + n_x)}$
3	$n_x < -n_{xy} \tan \theta$ $n_y \geq -n_{xy} \cot \theta$	0	$n_y + n_{xy} \cot \theta$	$\frac{n_{xy}}{\sin \theta \cos \theta}$	$\frac{-(n_{sy} - n_y)}{n_{c1} - n_{sy} + n_y}$
4*	$n_x < -n_{xy} \tan \theta$ $n_y < -n_{xy} \cot \theta$	0	0	$\frac{n_{c2} - n_x}{-n_y}$	$\frac{n_{xy}}{n_{c2} - n_x}$

*Compressão biaxial - $n_{c2} = (n_x + n_y) / 2 + \sqrt{(n_x - n_y)^2 / 4 + n_{xy}^2}$

3. MODELO DE TRÊS CAMADAS DE LOURENÇO E FIGUEIRAS

Formulação deste modelo de dimensionamento para estruturas laminares de cascas e lajes submetidas aos esforços combinados de membrana e flexão foi primeiramente introduzido por [9], o qual considerou somente o caso de armadura necessária na camada superior e inferior. Mais tarde [8] estendeu a formulação para uma condição mais geral, incluindo três mais casos de dimensionamento: armadura necessária somente na camada superior, armadura necessária somente na camada inferior e armadura desnecessária em ambas as camadas. Para o caso de armadura necessária na camada superior e inferior, *Caso 1*, por simplicidade, somente as equações da camada superior são apresentados e, as equações para a camada inferior são obtidas trocando-se os índices t e b . Assim, as forças e momentos resistidos na camada superior pela armadura na direcção x e y e no betão são dadas por, ver Figura 2(a,b),

$$\begin{aligned} n_{sxt} &= n_{xt} + n_{xyt} C_{xtt} \tan \theta_t + n_{xyb} C_{xtb} \tan \theta_b \\ n_{syt} &= n_{yt} + n_{xyt} C_{ytt} \cot \theta_t + n_{xyb} C_{ytb} \cot \theta_b \\ -n_{ct} &= n_{xyt} / \sin \theta_t \cos \theta_t \end{aligned} \quad (7)$$

em que,

$$n_{xt} = (h_{xb}/h_x) n_x + m_x/h_x \quad n_{yt} = (h_{yb}/h_y) n_y + m_y/h_y \quad n_{xyt} = [(h - a_b) n_{xy} + 2m_{xy}]/2h_c \quad (8)$$

$$C_{xtt} = [h_{xb} + 1/2(h - a_t)]/h_x \quad C_{xtb} = [h_{xb} - 1/2(h - a_b)]/h_x \quad (9a)$$

$$C_{ytt} = [h_{yb} + 1/2(h - a_t)]/h_y \quad C_{ytb} = [h_{yb} - 1/2(h - a_b)]/h_y \quad (9b)$$

sendo $h_c = h - (a_t + a_b)/2$, $h_x = h_{xt} + h_{xb}$ e $h_y = h_{yt} + h_{yb}$.

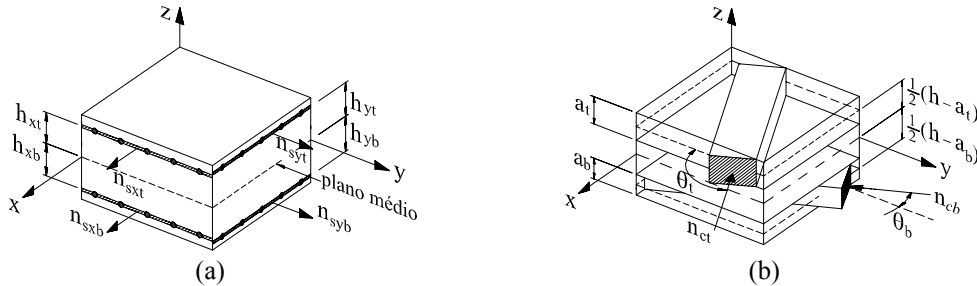


Figura 2: Armadura em ambas as camadas: esforços a) no betão; b) nas armaduras

Para o caso de armadura necessária somente na camada superior, *Caso 2*, a camada inferior está em compressão biaxial. Consequentemente, as forças e momentos resistidos pela armadura na direcção x e y e no betão na camada superior são dadas como,

$$n_{sxt} = n_{xt} + n_{xyt} C_{xtt} \tan \theta_t \quad n_{syt} = n_{yt} + n_{xyt} C_{ytt} \cot \theta_t \quad -n_{ct} = n_{xyt} / \sin \theta_t \cos \theta_t \quad (10)$$

sendo alterados também,

$$n_{xt} = [(h - a_b)/n_x + 2m_x]/2h_x \quad n_{yt} = [(h - a_b)/n_y + 2m_y]/2h_y \quad (11)$$

$$C_{xtt} = h_c/h_x \quad C_{ytt} = h_c/h_y \quad C_{xtb} = 0 \quad C_{ytb} = 0 \quad (12)$$

tendo $h_x = h_{xt} + (1/2) \cdot (h - h_b)$ e $h_y = h_{yt} + (1/2) \cdot (h - a_b)$. Para a camada inferior, as forças e momentos resistidos pelo betão são dadas como,

$$n_{cb} = -a_b f_c = (n_{cxb} + n_{cyb})/2 - \sqrt{(n_{cxb} - n_{cyb})^2/4 + n_{cxyb}^2} \quad (13)$$

onde $n_{cxb} = n_x - n_{sxt} - n_{ct} \sin^2 \theta_t$, $n_{cyb} = n_y - n_{syt} - n_{ct} \cos^2 \theta_t$ e $n_{cxyb} = n_{xy} + n_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t$.

No caso de armadura necessária só na camada inferior, *Caso 3*, a formulação é idêntica ao Caso 2. Para a última situação, *Caso 4*, em ambas as camadas não é necessário aplicar armadura, sendo todas as variáveis relativas a forças no betão. A definição das equações de equilíbrio neste caso é semelhante ao procedimento feito para a camada inferior em compressão biaxial do *Caso 2*.

3.1 Modelo de Três Camadas Fendilhado Sem Corte Transversal

O caso de esforços combinados de membrana, momentos fletores e corte transversal é mais complexo devido a necessidade de se trabalhar com extensões e tensões triaxiais. Entretanto, para casos práticos, o problema de se determinar as extensões e tensões no estado último de cascas de betão armado pode ser solucionado se tratado separadamente. No modelo três camadas de Lourenço e Figueiras, as forças combinadas de membrana e momentos fletores são modeladas actuando em duas camadas exteriores, fendilhadas de espessuras a_t e a_b . Para cada camada exterior, as forças resistidas no betão e na armadura são modeladas em seus respectivos planos médios, cujas posições não são necessariamente coincidentes. A partir da suposição que cada camada possui uma configuração constante de fendilhamento ao longo de sua espessura, pode-se assumir um comportamento de EPT para essas camadas. Consequentemente, a partir de tal suposição, os conceitos do CMM com análise limite podem ser estendidos ao modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras, ver [11]. A seguir, segue-se a determinação das expressões de f_c para a camada superior. Para a camada inferior, as expressões de f_c são obtidas trocando-se os índices t e b .

Como feito para os elementos a ETP, expressando $\cot^2 \theta$ na expressão da extensão ε_2 , equação (2), através das equações de dimensionamento do modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras, obtém-se as seguintes expressões de f_c para cada regime de dimensionamento para este modelo,

$$f_{c1}^t = (f_c^t)^{2/3} / [0.46 + 0.12 \cdot (C_{xtt} R_{syt} / C_{ytt} R_{sxt})] \quad (14a)$$

$$f_{c2}^t = (4.17 R_{sxt} / C_{xtt}) \cdot \left[\sqrt{0.1156 + 0.48 C_{xtt} (f_c^t)^{2/3} / R_{sxt}} - 0.34 \right] \quad f_{c3}^t = R_{syt} \leftrightarrow R_{sxt} \quad (14b)$$

$$f_{c4}^t = (50/29) \cdot (f_c^t)^{2/3} \quad (14c)$$

onde $R_{sxt} = n_{sxt} - n_{xt} - n_{xyb} C_{ytb} \tan \theta_b$ e $R_{syt} = n_{syt} - n_{yt} - n_{xyb} C_{ytb} \cot \theta_b$ para o caso de ambas as camadas serem armadas, *Caso 1*, e no o caso de a camada inferior estar em compressão biaxial, *Caso 2*, $R_{sxt} = n_{sxt} - n_{xt}$ e $R_{syt} = n_{syt} - n_{yt}$.

3.2 Modelo de Três Camadas Fendilhado com Corte Transversal

As forças de corte transversal são introduzidas no modelo de três camadas fendilhado através de sua camada intermédia, a qual é modelada como uma viga equivalente na direcção do esforço de corte transversal principal v_0 . Para isto um método unificado de dimensionamento de corte proposto por [11] para elementos de cascas e baseado nos conceitos do MCFT é usado para determinar o esforço de corte transversal resistido pelos estribos, ver [10] ou [11], sendo,

$$v_{s0} = v_0 - \beta(f'_c)^{1/2} h_c \quad (15)$$

onde $v_0 = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ e β é um factor depende da relação v_0/f'_c e da extensão normal ε_0 na direcção do esforço de corte transversal principal. A extensão ε_0 é definida como, ver [10],

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x \cos^2 \alpha_0 + \varepsilon_y \sin^2 \alpha_0 + (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cot 2\theta_{xy} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \quad (16)$$

onde $\alpha_0 = \tan^{-1}(v_x/v_y)$; ε_x e ε_y são as extensões no plano da camada exterior considerada e θ_{xy} a inclinação do esforço de compressão principal nesta camada. Conhecendo-se os valores de ε_x , ε_y e θ_{xy} determina-se o valor da extensão ε_0 . Aplicando-se os conceitos do CMM com análise limite, a extensão normal reduz-se a um valor constante $\varepsilon_0 = 0.004$, para todos os quatro regimes de dimensionamento. Assim, o valor de β pode ser determinado como descrito em [10].

4. VALIDAÇÃO

A avaliação do desempenho do modelo desenvolvido efectua-se comparando os resultados obtidos com este modelo com os resultados experimentais e numéricos (análise não linear) obtidos por outros autores. Na Tabela 2 essa comparação é efectuada para casca SE7 (espessura de 0.285m), analisada por [13], enquanto na Tabela 3 a comparação é efectuada para os elementos de laje ML7 e ML9 (espessura de 0.20m) estudados em [12]. O elemento de casca, SE7 foi analisado e dimensionado com um modelo de análise não linear material [14].

Tabela 2 – Elemento de casca SE7

Método	Carga última (kN/m)		Resistências (N/mm ²)			Áreas de armaduras (cm ² /m)				
						Superior		Inferior		Total
	n_{xy}	m_x	f'_c	f_{vx}	f_{vy}	x	y	x	y	
Experimental	1806	235	41.8	492	479	41.8	13.9	41.8	13.9	111.4
Não linear	1806	235	41.8	492	492	5.0	14.1	37.6	16.9	73.6
Modelo proposto	1806	235	41.8	492	492	0.0	14.5	42.3	17.9	74.7

Tabela 3 – Elementos de lajes ML7 e ML9

Ensaio	Carga última (kN.m/m)	Resistências (N/mm ²)			Áreas de armaduras (cm ² /m)	
		f'_c	f_{vx}	f_{vy}	Experimental	Modelo Proposto
ML7	42.5	44.4	479	479	5.0	5.0
ML9	101.5	44.4	412	412	20.0	19.8

5. CONCLUSÕES

O modelo de dimensionamento para estruturas laminares em betão, armado ortogonalmente e fendilhado representa a extensão da formulação do CMM com análise limite usando modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras. A introdução do comportamento fendilhado de acordo com os conceitos do CMM incluiu ao modelo de três camadas de Lourenço e Figueiras lei constitutiva para o betão e condições de compatibilidade, resultando em um novo modelo teórico para elementos de cascas de betão, armado ortogonalmente e fendilhado. Além disso, as forças de corte transversais foram incluídas no novo modelo pelo uso dos conceitos de um procedimento unificado de dimensionamento de corte, ao qual também se estendeu os conceitos do CMM. Na validação do novo modelo, boa conformidade foi encontrada com os resultados experimentais e numéricos através de uma estimativa do dimensionamento por meio de uma análise não linear.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Nielsen, M.P. – “On the strength of reinforced concrete disks”, *Acta Polytechnica Scandinavica*, 1971, Civ. Engrg. Constr. Service, N° 70, Copenhagen, 261 p.
- [2] Vecchio, F.J., Collins, M.P. – “The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear”, *ACI Journal*, 1986, 83(2), p. 219-231.
- [3] Kaufmann, W. – “Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces”, *IBK Bericht*, N° 234, ETH Zurich, 1998, 147 p.
- [4] Marti *et al.* – “Tension Chord Model for Structural Concrete”, *Structural Engineering IABSE*, 1998(8), N° 4, p. 287-298.
- [5] Palácio *et al.* – “Design of RC elements subjected to in-plane loading”, Report 03-DEC/E-30, 2003, University of Minho, 45 p.
- [6] Marti, P. – “Design of Concrete Slabs for Transverse Shear”, *ACI Structural Journal*, 1990, March-April, p. 180-190.
- [7] Nielsen, M.P. – “Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs”, *Acta Polytechnica Scandinavica*, 1964, Civ. Engrg. Constr. Service, N° 26, Copenhagen, 167 p.
- [8] Lourenço, P.B.; Figueiras, J.A. – “A solution for the design of reinforced concrete plates and shells”, *J. Struc. Engrg.*, 1995, ASCE, 121(5), p. 815-823.
- [9] Gupta, A. K. – “Combined Membrane and Flexural Reinforcement in Plates and Shells”, *J. Struc. Engrg.*, 1986, ASCE, 112 (3), p. 550-557.
- [10] Palácio *et al.* – “Design of RC elements subjected to in-plane loading”, Report 04-DEC/E-06, 2004, University of Minho, 65 p.
- [11] Adebar, P., He, W. – “Influence of membrane forces on transverse-shear reinforcement design”, *J. Struc. Engrg.*, 1994, ASCE, 120 (4), p. 1347-1366.
- [12] Marti *et al.* – “Response of Reinforced Concrete Slabs Elements in Torsion”, *J. Struc. Engrg.*, 1987, ASCE, 113 (5), p. 976-993.
- [13] Kirsner, U.; Collins, M.P. – “Investigating the Behavior of Reinforced Concrete Shell Elements”, Pub. 86-09, 1986, Dept. Civ. Engrg., Univ. of Toronto, 209 p.
- [14] Kolleger, J. – “Computer Programs for Consistent Design of Surface Structures”, *Structural Engineering, IABSE*, 1991, N° 62, p. 507-512.